少数結合振動子系における解の遷移現象

北海道大学大学院理学研究科　　伊藤賢太郎

解の遷移現象を示すモデル方程式として、三つのStuart-Landau方程式をrepulsiveに結合した系を考える。この系において複数の振動パターンを時間変化とともに不規則に移り変わる現象が現れることと、その状態に至るまでの分岐構造について解析した結果を報告する。

1 はじめに

同一の要素を対称に結合した系は様々な対称性をもった解が表れることが知られており [1, 2]、複数の周期解を時間変化と共に移り変わる現象が粘菌振動子系 [3] や化学反応系 [4] において報告されている。複数のカオス的な状態を移り変わる現象としては、crisis-induced intermittency [5] が知られている。これは、複数のアトラクターが融合した (attractor merging crisis) 場合や、カオスアトラクターが不連続に巨大化した（interior crisis）場合にみられる現象である。attractor-merging crisis の場合は、軌道はcrisisが起こる前に存在していたアトラクターの一つに長時間止まった後、やがてその領域を離れ、別のアトラクターが存在していた領域に移るといった振る舞いを繰り返す。

我々は単純なモデル方程式の分岐構造を解析することにより、２種類のカオスへと到るルートを発見し、複数のアトラクターが合わさって巨大なアトラクターとなることを確認し、これらの結果から解の移り変わり現象がおこるメカニズムについて説明を与える。

2 モデル方程式

我々はモデル方程式として、Stuart-Landau方程式 [6, 7] を３つ結合した系の分岐構造を調べた。Stuart-Landau方程式はHopf分岐を示す標準系であり、位相振動子との大きな違いは、位相の他に振幅の自由度を持ち、位相速度が振幅依存性をもってるである。ただし、それぞれの要素は同一であるとし、結合は反発的であるとした。反発的な結合は、それぞれの要素が同じ状態に揃うことを妨げる効果を持つ。式は以下のように書ける。

$$\dot{z}_j = (\alpha + i)z_j - (1 - i\beta)|z_j|^2 z_j + \kappa \sum_{n=1}^{3}(z_n - z_j), \tag{1}$$

βは振幅依存性をあらわし、κは結合定数で反発的な効果を出すため負であるとした。

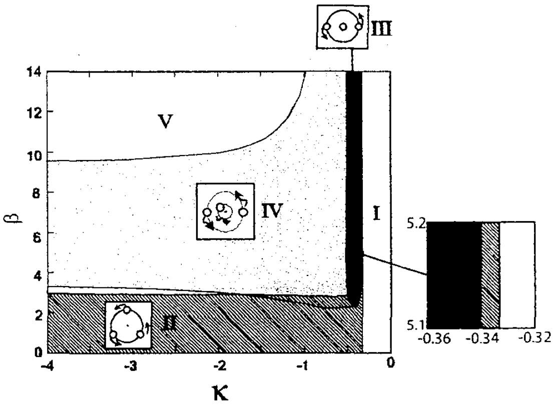

図 1: (κ, β) 上における各種の解が安定な領域。I: 自明解、II: 巡回的な解、III: 部分反位相、IV: S_2 トーラス、V: 安定な周期解及びトーラスが存在しない領域（カオhス解）

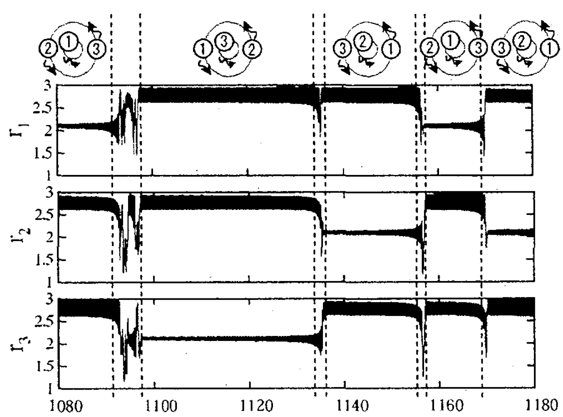

図 2: S_2 トーラス間を間欠的に移り変わる解の振幅 $r_j(=|z_j|)$ の時系列。$\alpha=-1$、$\kappa=-3$、 $\beta=9.8$。

3 結果

はじめに、我々は自明解からの分岐を追うために、$\alpha=-1$ の場合について振幅依存性 β と結合定数 κ を変化させることにより解の分岐構造を調べる。また、各要素が limit cycle 振動子となる $\alpha=1$ の場合についても分岐構造を調べていく。

・$\alpha=-1$ の場合

安定な周期解、準周期解が存在するパラメータ領域を示したものが図1である。$\kappa<-1/3$ においては多様な周期解が存在しており、それぞれの周期解は以下の通りである。

巡回的な解: $(z_1(t), z_2(t), z_3(t)) = (f(t), f(t)e^{-\frac{2\pi i}{3}}, f(t)e^{-\frac{4\pi i}{3}})$
部分反位相解: $(z_1(t), z_2(t), z_3(t)) = (0, f(t), -f(t))$

ただし、$f(t)=Re^{i((1+\beta R^2)t+\theta_0))}$、$R=\sqrt{-1-3\kappa}$。この他に部分同位相解（$z_1(t)=z_2(t)$）が存在するが、この解は常に不安定である。これらの周期解は分岐点 $\kappa=-1/3$ において自明解（$z_1=z_2=z_3=0$）から分岐したもので、分岐直後に安定なものは巡回的な解のみである。β がある程度以上大きい場合は、κ を下げていくにつれ、巡回的な解が subcritical な Hopf 分岐により不安定化し、部分反位相解が subcritical な Hopf 分岐により安定化する（図1、拡大図)。さらに、κ をさげていくと安定な部分反位相解は、Hopf 分岐により不安定となり、かわって安定な準周期解が現れる。この準周期解は、原点に止まっていた z_1 が振幅 $|z_1|$ の小さい領域で振動する。振幅および位相差について周期性があり、もともと反位相であった二つの要素 z_2、z_3 に関して、$|z_2(t+T_2/2)|=|z_3(t)|$ の関係が成り立つような解である。ただし、T_2 は振幅 $|z_2|$、$|z_3|$ の周期であり、内側の軌道の $|z_1|$ は周期 $T_2/2$ で振動する。以降、この準周期解の乗っているトーラスを S_2 トーラスと呼ぶことにする。

安定な S_2 トーラスは、振幅依存性を上げていくと subcritical pitchfork 分岐により不安定化し、その分岐点を越えた付近で不安定化した S_2 トーラス間を間欠的に移り変わる解が現れる。

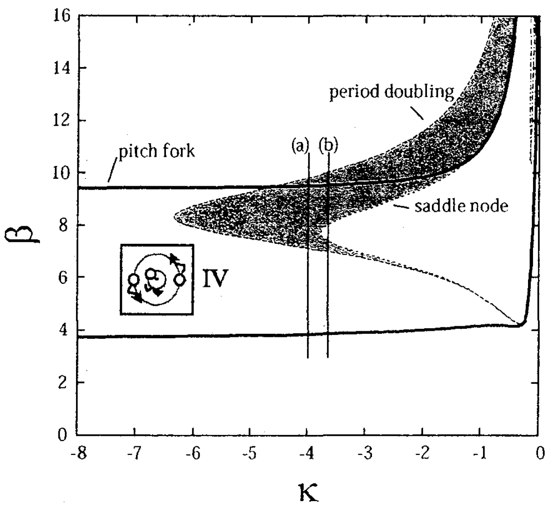

図 3: S_2 トーラスの分岐図 ($\alpha = 1$)。IV (太い曲線で上下を挟まれた領域) : S_2 トーラスが安定、灰色 : S_1 トーラスが安定。

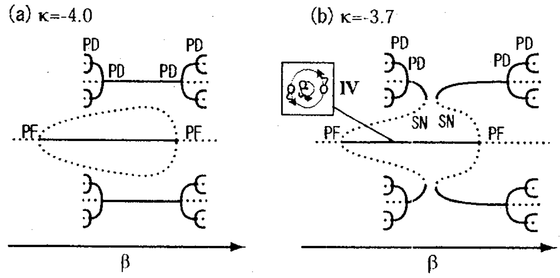

図 4: S_2 トーラスの模式的な分岐図。(a) $\kappa = -4.0$、 (b) $\kappa = -3.7$。

・$\alpha = 1$ の場合

$\alpha = -1$ の場合に得られた S_2 トーラスからパラメータを変化させ、解の枝を追っていくことにより $\alpha = 1$ の場合の S_2 トーラスが得られる。その S_2 トーラスの分岐構造を調べたものが図 3 である。広いパラメータ領域で、安定な S_2 トーラスが存在することがわかる。$\alpha = -1$ の場合と異なり、S_2 トーラスから pitchfork 分岐により分岐した対称性の破れたトーラス（S_1 トーラスと呼ぶことにする）が安定な領域が存在することがわかる。図 5 は同じ S_2 トーラスから分岐した二つの S_1 トーラスの分岐図を示したものである。パラメータを変化させるにつれて、この S_1 トーラスが周期倍分岐ルートを通してカオスとなり、また、このカオス同士が融合することにより、より大きな高い対称性を持つカオスへと遷移していくことがわかる。このとき、crisis-induced intermittency が起こり、融合する前にアトラクターが存在した領域間を軌道が移り変わることを確認した。この attractor-merging crisis により、カオスアトラクターの数は 6 から 3 へと変化するが、さらに $\beta = 12.62$ 付近において crisis が起こり、3 つのアトラクターが 1 つになる。

4 まとめ

我々は、Stuart-Landau 方程式の結合系の分岐構造と時系列を調べることにより、二つのカオスへと到るルートを発見した。一つは、S_2 トーラスから間欠的遷移を経てカオスへ到るルート。もう一つは、S_2 トーラスから pitchfork 分岐、周期倍分岐を経て複数のカオスアトラクタとなり、それらが合わさって大きなアトラクターへと到るルートである。これらの結果により、$\alpha = -1$ のときにみられた間欠的なトーラス間の移り変わりは、複数のカオスアトラクタが融合して生まれた巨大なアトラクタ内の不安定なトーラスの不安定性が弱くなったことにより、軌道のトーラス近傍の滞在時間が大きくなったものであると解釈することができる。

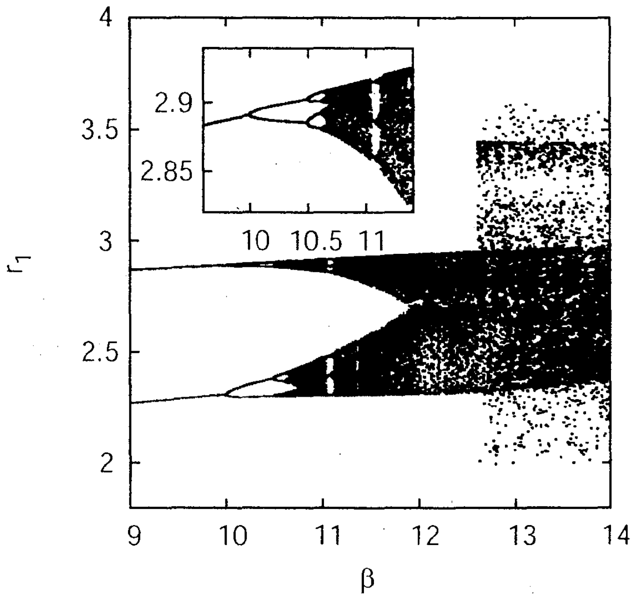

図 5: S_1 トーラスの分岐図（$\kappa = -3.7$）。ポアンカレ断面は $r_2 = r_3$ であり、$\dot{r_3} - \dot{r_2} > 0$ を満たす点のみプロットした。$\beta = 12.02$ において二つのアトラクターが融合していることがわかる。

参考文献

[1] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths. *Synchronization. A universal concept in non-linear sciences.* Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[2] M. Golubitsky and I. Stewert. *The Symmetry Perspective.* Birkhauser Verlag Barlag, Boston, Berlin, 2002.

[3] A. Takamatsu, R. Tanaka, H. Yamada, T. Nakagaki, T. Fujii, and I. Endo. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 87, p. 078102, 2001.

[4] M. Yoshimoto, K. Yoshikawa, and Y. Mori. *Phys. Rev. E.*, Vol. 47, p. 864, 1993.

[5] C. Grebogi, E. Ott, and F. Romeiras J. A. Yorke. *Phys. Rev. A*, Vol. 36, p. 5365, 1987.

[6] Y. Kuramoto. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence.* Springer, Berlin, 1984.

[7] T. Yamada and H. Fujisaka. *Z. Physik B*, Vol. 28, p. 239, 1977.